Erinnerung:

Zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ heissen zueinander *orthogonal*, und man schreibt $v \perp w$.

Analog $v \perp S$ oder $S \perp v$ beziehungsweise $S \perp S'$ für Teilmengen $S, S' \subset V$.

10.8 Unterräume, orthogonales Komplement

Definition: Das *orthogonale Komplement* einer Teilmenge $S \subset V$ ist die Teilmenge

$$S^\perp \;:=\; \{v \in V \mid v \perp S\}.$$

Proposition: Das orthogonale Komplement ist ein Unterraum.

Bew.: $\forall w \in S$: $\{v \in V \mid v \perp w\} = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0\} = \mathrm{Kern}(\langle \cdot, w \rangle : V \to \mathbb{R})$

ist ein Unterraum!

$S^\perp = \bigcap_{w \in S} \mathrm{Kern}(\langle \cdot, w \rangle) =$ Unterraum. qed.

Beispiel: Es gilt $\{0\}^\perp = \varnothing^\perp = V$ und $V^\perp = \{0\}$.

$\forall v \in V$: $\langle v, 0 \rangle = 0$ direkt $\forall v \in V \setminus \{0\}$: $\langle v, v \rangle > 0$

$\Rightarrow v \notin V^\perp$

Proposition: (a) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $S \subset (S^\perp)^\perp$.

(b) Für je zwei Teilmengen $S \subset T \subset V$ gilt $S^\perp \supset T^\perp$.

(c) Für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(d) $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$

Bew.: "$\supset$" nach (b)

$v \in S^\perp$: $\forall w = \sum'_{s\in S} \alpha_s s$; $\alpha_s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle v,w\rangle = \sum'_{s\in S} \alpha_s \cdot \underbrace{\langle v,s\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow v \perp w$

$\Downarrow$

$v \in \langle S\rangle^\perp$.

qed.

Bew. (a) $\underbrace{\forall w\in S: \forall v\in S^\perp}$: $\langle w,v\rangle = \langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow w \perp v$.

$\Rightarrow v \perp w \Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0$

Variiere $v \in S^\perp$ $\Rightarrow \forall w\in S$: $w \in (S^\perp)^\perp$

(b) $T^\perp = \{v\in V: v\perp T\}$

$\cap$

$S^\perp = \{v \in V: v \perp S\}$

(c) $\forall v \in U\cap U^\perp \Rightarrow v \perp v \Rightarrow v = 0$.

$U, U^\perp$ Unterräume $\Rightarrow$ enthalten 0.

qed.

Proposition: Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis eines Unterraums U von V, und sei $v \in V$. Für jeden Vektor $u \in U$ sind äquivalent:

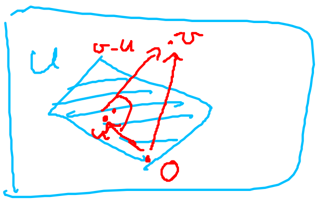
(a) $u = \sum_{i=1}^n \langle b_i, v\rangle \cdot b_i$.

(b) $v - u \in U^\perp$.

(c) $\|v-u\| = \min\{\|v-u'\| : u' \in U\}$.

V

$u \in U \subset V \ni v$



Bew.: (a)$\Leftrightarrow$(b) Schreibe $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Dann (b): $v-u \perp U \Leftrightarrow \forall i: v-u \perp b_i$

$\Leftrightarrow \forall i: 0 = \langle v-u, b_i\rangle = \langle v,b_i\rangle - \langle u,b_i\rangle = \langle v,b_i\rangle - \alpha_i$

$\Leftrightarrow \forall i: \alpha_i = \langle v,b_i\rangle \Leftrightarrow$ (a).

Sei u wie in (b).

(b)$\Leftrightarrow$(c) $\forall u' \in U$:

$\|v-u'\|^2 = \|(v-u)+(u-u')\|^2$

$= \|v-u\|^2 + 2\cdot\langle \underbrace{v-u}_{\in U^\perp}, \underbrace{u-u'}_{\in U}\rangle + \|u-u'\|^2$

$= \|v-u\|^2 + \|u-u'\|^2$ immer $\geq \|v-u\|^2$

und $= \|v-u\|^2$ g.d.w. $\|u-u'\|^2 = 0 \Leftrightarrow u-u'=0$.

qed.

Folge: Für jeden endlich-dimensionalen Unterraum $U \subset V$ gilt $V = U \oplus U^\perp$ und somit $U^\perp \xrightarrow{\sim} V/U$.

Bemerkung: Dies gilt insbesondere dann, wenn schon $\dim(V) < \infty$ ist.

Bew.: U besitzt eine ONB nach §10.9.

v, u wie dort $\Rightarrow$ $v = \underset{U}{\underset{\cap}{u}} + \underset{U^\perp}{\underset{\cap}{(v-u)}}$ $\Big]$ Also ist $V = U + U^\perp$, $0 = U \cap U^\perp$ $\Big\}$ $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$. qed.

Definition: Die Abbildung $\pi_U : V \to U$, die $v \in V$ auf das obige $u \in U$ abbildet, heisst die *orthogonale Projektion von V auf U*.

Beispiel: Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, und sei $U \subset V$ der Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad $\leqslant n$. Für jede Funktion $f \in V$ ist dann $\pi_U(f)$ die eindeutige Funktion in U, welche f bestmöglich *im quadratischen Mittel approximiert.*

$\pi_U(f) = g$

oder $U \subset V$ beliebig endlicher Dimension.

minimal $\|f-g\|^2 = \int_a^b (f-g)^2(x)\,dx$

$U + U^\perp$

Vorsicht: Für einen unendlich-dimensionalen Unterraum U kann $U \oplus U^\perp$ ein echter Unterraum von V sein.

Beispiel: Sei V der Vektorraum aller beschränkten reellen Folgen $\underline{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n y_n}{n^2}.$$

Konvergiert da $|x_n|, |y_n| \leq C$

$\Rightarrow \sum_n \left| \frac{x_n y_n}{n^2} \right| \leq \sum_n \frac{C^2}{n^2} < \infty$

Sei U der Unterraum aller Folgen mit der Eigenschaft $\forall n \gg 0\colon x_n = 0$. Dann gilt $U^\perp = 0$. Die Folgen $(m \cdot \delta_{nm})_{n\geqslant 1}$ für alle $m \geqslant 1$ bilden eine Orthonormalbasis von U, welche keine Fortsetzung zu einer Orthonormalbasis von V hat.

$U^\perp = 0 \Rightarrow U \oplus U^\perp = U \subsetneq V.$

$U^\perp = 0$

$\Rightarrow U \subsetneq (U^\perp)^\perp = V$

Für jedes $n \geq 1$ sei $\underline{e}_n := (m \cdot \delta_{mn})_m$

$\Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{e}_n \rangle = \sum_m \frac{x_m \cdot m \cdot \delta_{mn}}{m^2} = \frac{x_n}{n}$

Also: $\underline{x} \in U^\perp \Rightarrow \forall n: x_n = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$

$\langle \underline{e}_{n'}, \underline{e}_n \rangle = \frac{n' \cdot \delta_{n',n}}{n} = \begin{cases} 0 & n' \neq n \\ 1 & n' = n \end{cases}$

Proposition: Sei $U \subset V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus U^{\perp}$.

(a) Jede Orthonormalbasis von U zusammen mit jeder Orthonormalbasis von $U^{\perp}$ bildet eine Orthonormalbasis von V.

(b) $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$.

(c) $U = (U^{\perp})^{\perp}$.

(d) $U = V$ genau dann, wenn $U^{\perp} = 0$ ist.

Bew.: (a) $\left.\begin{array}{l} B \text{ ONB von } U \\ B' \text{ ONB von } U^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow B \dot\cup B'$ Basis von $U \oplus U^{\perp} = V$ ONB.

(b) ✓

(c) $\left.\begin{array}{l} \forall u \in U \\ \forall u' \in U^{\perp} \end{array}\right\} \; u+u' \in (U^{\perp})^{\perp} \Longleftrightarrow u+u' \perp U^{\perp} \overset{u \perp U^{\perp}}{\Longleftrightarrow} u' \perp U^{\perp} \Longleftrightarrow u' = 0$

Also ist $(U^{\perp})^{\perp} = U$

(d) folgt direkt aus $V = U \oplus U^{\perp}$.

qed.

10.9 Orthogonalisierung

Satz: *(Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)* Für jedes linear unabhängige Tupel $T = (v_1, \ldots, v_n)$ in V existiert genau ein Orthonormalsystem $B = (b_1, \ldots, b_n)$, so dass gilt:

$$(*) \qquad \boxed{\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n\colon\ v_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} b_i \quad \text{mit} \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a_{jj} > 0.}$$

Ist ausserdem T eine Basis von V, so ist B eine Orthonormalbasis von V.

Bemerkung: Die Bedingung $(*)$ ist äquivalent dazu, dass die Basiswechselmatrix ${}_B[\mathrm{id}_V]_T$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen > 0 ist, oder auch zu:

$$(**) \qquad \boxed{\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n\colon\ b_j = \sum_{i=1}^{j} a'_{ij} v_i \quad \text{mit} \quad a'_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a'_{jj} > 0.}$$

$(*) \Rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$ mit $a_{ij} := 0$ für $i > j$.

$A := (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} =$ invertierbar

T ist Basis eines Unterraums $U \subset V$.

$\Rightarrow B$ Basis von U.

und $A = {}_B[\mathrm{id}_V]_T$

$\Updownarrow$

A^{-1} obere Dreiecksmatrix mit Diagonale > 0.

Beweis: Induktion über n und OBdA $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits eindeutig konstruiert.

Konstruktion: Sind $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits konstruiert, so setze

$$\boxed{\underbrace{\tilde{v}_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, v_n \rangle \cdot b_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{b_n := \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|}}.$$

orthogonale Projektion von v_n auf $\langle b_1, \ldots, b_{n-1} \rangle =: U$ $= \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$

normiert.

$\tilde{v}_n \perp U \Leftarrow$

$\Rightarrow b_n \perp U$

Da $v_n \notin U$ ist $\tilde{v}_n \neq 0$.

$$b_n = \frac{1}{\|\tilde{v}_n\|} \cdot \left(v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, v_n \rangle \cdot b_i \right) = \frac{1}{\|\tilde{v}_n\|} \cdot v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \underset{\in \mathbb{R}}{\alpha_i} b_i = \underbrace{\frac{1}{\|\tilde{v}_n\|}}_{>0} \cdot v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \underset{\in \mathbb{R}}{\beta_i} v_i$$

Also gilt (**)

$$\left.\begin{array}{l} \langle b_n, b_n \rangle = \|b_n\|^2 = 1 \\ \forall i < n: \quad b_n \perp b_i \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ Orthonormalsystem.}$$

Damit ist $v_n - \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} a'_{in} b_i}_{\in U} = \underbrace{a'_{nn} b_n}_{\in U^{\perp}}$

Eindeutigkeit: Sei $v_n = \sum_{i=1}^{n} a'_{in} b_i$ wie in (**). Also ist dies die orthogonale Projektion von v_n auf U. Also sind die a'_{in} eindeutig.

qed.